# Feuille de révisions

**Exercice**

Retrouver dans vos livres préférés les calculs de

1. $\int_{\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$,
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$,
3. $\sum_{k=1}^{n} \exp(2i\pi \frac{k^2}{n}) = \sqrt{n}\frac{i-(-i)^{n+1}}{1+i}$

*via* l'utilisation du calcul de résidus.

**Exercice**

1. Montrer que pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 - \{1\}$ il existe une primitive $\log_\theta$ de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\theta}$ s'annulant en 1
2. Donner leur developpement en serie entière au voisinage de 1
3. Comparer $\log_\theta$ et $\log_{\theta'}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\theta} - \mathbf{R}_+ e^{i\theta'}$
4. Vérifier que $\exp \circ \log_\theta(z) = z$. Qu'en est-il de $\log_\theta \circ \exp$ ?
5. Dessiner les transformations du plan définies par exp et log.
6. Montrer que si $f$ est holomorphe sur la couronne $\{z \mid r < |z| < R\}$ et vérifie $\frac{f'}{f} = \frac{\alpha}{z}$ alors $\alpha \in \mathbf{Z}$.

**Exercice** Soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe.

1. Donner l'ordre du pôle et le résidu de la fonction $\frac{f'}{f}$ en un point $z \in U$ (en fonction de l'ordre d'annulation de $f$ au point $z$).
2. Si $\gamma$ est un lacet dans $U$ et qui ne passe pas par des zéros de $f$, calculer
$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$
(on constatera qu'il s'agit d'un entier).
3. Généraliser ce qui précède au cas où $f$ est méromorphe dans $U$ et où le lacet $\gamma$ ne passe pas par des pôles de $f$.

**Exercice** [Fonctions harmoniques]

Une fonction $u : U \to \mathbf{R}$ est dite harmonique si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et si
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1. Montrer que le Laplacien s'obtient également par la formule (avec $f : U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$) :
$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$$
2. Montrer qu'une fonction holomorphe définie sur un disque admet une primitive sur ce disque et en déduire que toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. En particulier, une fonction harmonique est en fait $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer par un calcul direct que si $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annule pas sur $U$ alors $u = \log|f|$ est harmonique sur $U$.
4. Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, montrer que $f$ s'écrit localement $\exp(g)$ avec $g$ holomorphe et en déduire une autre démonstration du fait que $u = \log|f|$ est harmonique sur $U$.

**Exercice** [Noyau de Poisson]

On considère la fonction définie pour $0 \leqslant r < 1$ et $t \in \mathbf{R}$ par :
$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int}.$$

1. Montrer les propriétés suivantes du noyau $P$ :
   — $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = 1$
   — $P_r(\theta - t) = \mathrm{Re}\frac{\mathrm{e^{it}+z}}{\mathrm{e^{it}-z}} = \frac{\mathrm{1-r^2}}{\mathrm{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}} = \frac{\mathrm{1-|z|^2}}{\mathrm{|e^{it}-z|^2}}$
   — $P_r(-t) = P_r(t)$ et $\forall 0 < |t| \leqslant \pi, \lim_{r\to 1} P_r(t) = 0$
   où l'on a posé $z = re^{i\theta}$.
2. On note $\mathbb{S}^1$ le bord du disque unité $\mathbb{D}$ et, pour $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbf{R}$ une fonction continue, on considère $P[g] : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $g(z)$ si $z \in \mathbb{S}^1$ et pour $z \in \mathbb{D}$ par
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{\mathrm{e^{it}+z}}{\mathrm{e^{it}-z}}\mathrm{g(e^{it})dt}$$
   c'est la transformée de Poisson de $g$.
3. Montrer que $P[g]$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.
4. Calculer $P[g]$ pour $g(e^{it}) = e^{ikt}$, $k \in \mathbf{Z}$.
5. Montrer que la fonction $f$ est harmonique sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ (on pourra utiliser le théorème de Fejer)
6. Soit $u : \mathbb{D} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et harmonique sur $\mathbb{D}$. Montrer que $u = P[u|_{\mathbb{S}^1}]$ (appliquer le principe du maximum) et en déduire une nouvelle fois que toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

**Exercice**[Lemme de Schwarz]
Nous allons montrer :
*Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leqslant 1$. Alors*
$\star$ *$\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leqslant |z|$ et $|f'(0)| \leqslant 1$,*
$\star\star$ *si il y a égalité dans une des deux inégalités ci-dessus alors $f(z) = \lambda z$ pour $|\lambda| = 1$.*

1. Montrer que $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$
2. En déduire que $\forall 0 < r < 1, \forall z \in D(0, r),\ |g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$
3. En déduire $\star$
4. En réutilisant le principe du maximum montrer $\star\star$

**Exercice**[Automorphismes de $\mathbb{D}$]
Pour $\alpha \in \mathbb{D}$ on note $h_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

1. Montrer que $h_\alpha$ définit un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ se prolongeant continument en un homéomorphisme de $\bar{\mathbb{D}}$.
2. Soit $f$ un bihlomorphisme de $\mathbb{D}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ et $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tels que $f(z) = \lambda\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

**Exercice**[$\mathrm{SU}(1,1)$]
On note $(\cdot|\cdot)$ le produit hermitien de signature $(1,1)$ sur $\mathbf{C}^2$ :
$$\left(\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}w_1 & w_2\end{bmatrix}\right) = v_1\bar{w}_1 - v_2\bar{w}_2$$
et $\mathrm{SU}(1,1) = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \mid (gv|gw) = (v|w)\}$

1. Montrer que $g \in \mathrm{SU}(1,1)$ si et seulement si $g = \begin{bmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{bmatrix}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$
2. Vérifier que l'application de $\mathrm{SU}(1,1)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ qui envoie $\begin{bmatrix}a & \bar{b}\\ b & \bar{a}\end{bmatrix}$ sur $z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ est un morphisme de groupe dont vous donnerez le noyau.

**Exercice**[$\mathrm{SU}(2)$]
On note $(\cdot|\cdot)$ le produit hermitien défini positif sur $\mathbf{C}^2$ :
$$\left(\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}w_1 & w_2\end{bmatrix}\right) = v_1\bar{w}_1 + v_2\bar{w}_2$$
et $\mathrm{SU}(2) = \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \mid (gv|gw) = (v|w)\}$

1. Montrer que $g \in \mathrm{SU}(2)$ si et seulement si $g = \begin{bmatrix}a & -\bar{b}\\ b & \bar{a}\end{bmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$
2. En déduire que $\mathrm{SU}(2)$ est la sphère $\mathbb{S}^3$.